# TEMA 4: ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO

**Def.** (Producto escalar)

Sea $V$ un $K$-e.v. Se llama producto escalar a toda aplicación, denotada $\cdot$ ó $\langle , \rangle$,

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto u \cdot v \equiv \langle u, v \rangle$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) Bilinealidad:

1.1. $(u+u')\cdot v = u\cdot v + u' v \quad \forall u, u', v \in V$

1.2. $u \cdot (v+v') = u\cdot v + u \cdot v' \quad \forall u, u', v \in V$

1.3. $\alpha \cdot (u \cdot v) = (\alpha \cdot u)\cdot v = u \cdot (\alpha \cdot v), \ \forall \alpha \in K, \ \forall u, v \in V$

2) simétrica: $u \cdot v = v \cdot u \quad \forall u, v \in V$

3) Definida positiva: $u \cdot u > 0 \quad \forall u \neq 0$

Al par $(V, \langle , \rangle)$ se le llama espacio vectorial euclídeo.

**Ejemplos**

1) Producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$.

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

2) $V = L^2(a,b) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int_a^b f^2(x)dx < +\infty \}$

$$\langle , \rangle_{L^2} : L^2(a,b) \times L^2(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

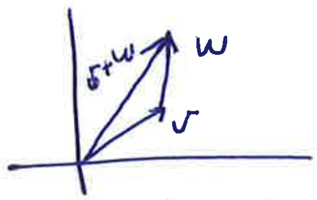
# Distancia (o norma) y ángulo asociados a un producto escalar

Sea $(V,\cdot)$ un e.v.e. Dado $v \in V$, se llama norma de $v$, denotado $\|\cdot\|$ al número

$$\|v\| = +\sqrt{v\cdot v}.$$

## Propiedades de la norma:

1) $\|v\| \geq 0$ y $\|v\| = 0 \iff v = 0$.
2) Desigualdad triangular: $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall\, v,w \in V$




3) Desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|v\cdot w| \leq \|v\|\,\|w\| \quad \forall\, v,w \in V.$$

Si $v$ y $w \neq 0$, entonces

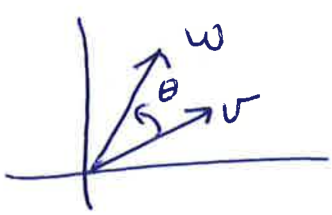
$$\frac{|v\cdot w|}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1 \text{ , es decir,}$$

$$-1 \leq \frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1.$$

Por tanto, existe un único $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\frac{v\cdot w}{\|v\|\,\|w\|} = \cos\theta.$$

$\theta$ se llama ángulo formado por los vectores $v$ y $w$.



Por tanto,

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos\theta.$$

ORTOGONALIDAD

- Se dice que $u$ y $v$ son ortogonales si $u \cdot v = 0$.
- Un sistema de vectores se dice ortogonal si sus vectores son ortogonales dos a dos. Si además son de norma 1, unitarios, entonces el sistema o la base se dice ortonormal.

en particular una base de $V$

## Método de ortogonalización de Gram-Schmith

Sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de $V$. El objetivo es construir, a partir de B, una nueva base B' ortonormal.

Método:

1º) $w_1 = u_1$

2º) $w_2 = u_2 + a_{21} w_1$

Buscamos $a_{21}$ para que $w_1 \cdot w_2 = 0$;

$$0 = w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot u_2 + a_{21}\, w_1 \cdot w_1$$

$$\Rightarrow \quad a_{21} = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1}$$

3º) $w_3 = u_3 + a_{31} w_1 + a_{32} w_2$

Buscamos $a_{31}$ y $a_{32}$ de modo que

$$0 = w_1 \cdot w_3 = w_1 \cdot u_3 + a_{31}\, w_1 \cdot w_1 + a_{32} \underbrace{w_1 \cdot w_2}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad a_{31} = -\frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1}$$

$$0 = w_2 \cdot w_3 = w_2 \cdot u_3 + a_{31} \underbrace{w_2 \cdot w_1}_{0} + a_{32}\, w_2 \cdot w_2$$

$$\Rightarrow \quad a_{32} = -\frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2}$$

Y así sucesivamente.

El sistema $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ así construido es una base ortogonal. Dividiendo por la norma:

$$B' = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|} = w_1', \ \frac{w_2}{\|w_2\|} = w_2', \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} = w_n' \right\}.$$

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3$, $B = \{ u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,0), u_3 = (1,0,0) \}$

1º) $w_1 = u_1 = (1,1,1)$

2º) $w_2 = u_2 + a_{21} w_1$

$0 = w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot u_2 + a_{21} w_1 \cdot w_1$

$$\Rightarrow a_{21} = -\frac{w_1 \cdot u_2}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{(1,1,1)\cdot(2,1,0)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)} = -\frac{3}{3} = -1$$

$w_2 = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1)$

3º) $w_3 = u_3 + a_{31} w_1 + a_{32} w_2$

$0 = w_1 \cdot w_3 = w_1 \cdot u_3 + a_{31} w_1 \cdot w_1 + a_{32} \overset{0}{\cancel{w_1 \cdot w_2}}$

$$\Rightarrow a_{31} = -\frac{w_1 \cdot u_3}{w_1 \cdot w_1} = -\frac{(1,1,1)\cdot(1,0,0)}{3} = -\frac{1}{3}$$

$0 = w_2 \cdot w_3 = w_2 \cdot u_3 + a_{31} \overset{0}{\cancel{w_2 \cdot w_1}} + a_{32} w_2 \cdot w_2$

$$\Rightarrow a_{32} = -\frac{w_2 \cdot u_3}{w_2 \cdot w_2} = -\frac{(1,0,-1)\cdot(1,0,0)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$w_3 = (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(1,0,-1) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Base ortogonal $\left\{ (1,1,1), (1,0,-1), \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \right\}$

$\|w_1\| = \sqrt{3}$, $\|w_2\| = \sqrt{2}$, $\|w_3\| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Base ortonormal

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \sqrt{6}\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \right\}.$$

# SUBESPACIO ORTOGONAL. PROYECCIÓN ORTOGONAL

Sean $V$ un e.v.e. y $W \subset V$ un subespacio vectorial.

- Se llama subespacio ortogonal a $W$, denotado $W^\perp$, al conjunto

$$W^\perp = \{ v \in V : \; v \cdot w = 0 \;\; \forall \, w \in W \}$$

Se puede probar que $W^\perp$ es un subespacio vectorial y que además
$$V = W \oplus W^\perp .$$

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^3 \quad , \quad W = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 0 \}$

$$W^\perp = \{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x,y,z) \cdot w = 0 \quad \forall \, w \in W \}$$

$w = (w_1, w_2, 0). \qquad (x,y,z) \cdot (w_1, w_2, 0) = 0 \;\; \forall \, w_1, w_2.$

$$x w_1 + y w_2 = 0.$$

Si tomamos $w_1 = 1, \; w_2 = 0 \to x = 0$

" " $w_1 = 0, \; w_1 = 1 \to y = 0.$ $\Rightarrow W^\perp = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = y = 0 \}$.

= eje Z.

Dado que $V = W \oplus W^\perp$, se tiene ~~de~~ que todo vector $v \in V$ se puede escribir en la forma

$$v = w + w^\perp \quad \text{con } w \in W, \; w^\perp \in W^\perp.$$

Al vector $w$ se le llama proyección ortogonal de $v$ en $W$ y se denota $w = \mathbb{P}_{v \to W}$

. Se llama distancia de $v$ a $W$ al número

$$\mathrm{dist}(v, W) = \min_{w \in W} \|v - w\|.$$

Se puede probar que $\mathrm{dist}(v, W) = \|w^{\perp}\|$.